Nafouz

التمرين الأول(04ن) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $a_n = 2\times 5^n + 7$

1) أ- بيّـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون a_n فردي.

ب- عيّـن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 8.

جـ- استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $a_n \equiv 1[8]$.

2) أ- برهن أنه إذا كان: $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 7[125] \end{cases}$ فإن: $x \equiv 257[1000]$.

ب- بيّـن أنه من أجل $n \geq 3$ يكون: $a_n \equiv 257[1000]$.

جـ- ما هي الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times 5^{2022}+7)(2\times 5^{2021}+7)$ ؟

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$

ب- نعتبر $PGCD(a_{2n};a_{2n+1}) = d$ ، بيّـن أن d يختلف عن 7 ثم عيّـن قيمته.

التمرين الثاني(04ن) يوجد جواب صحيح واحد بين الأجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية، عينه مع التبرير.

1) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \left(\frac{2}{3}\alpha\right)^n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما، قيم مجموعة قيم α التي تكون من أجلها (v_n) متتالية متقاربة هي:

أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ ب) $]-1;1[$ جـ) $\left]0;\frac{2}{3}\right[$

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y' - 2y + 6 = 0$ والذي يحقق الشرط $f(0) = 4$ هو:

أ) $f(x) = 3e^{\frac{2}{3}x} + 1$ ب) $f(x) = e^{\frac{2}{3}x} + 3$ جـ) $f(x) = 2e^{\frac{2}{3}x} + 2$

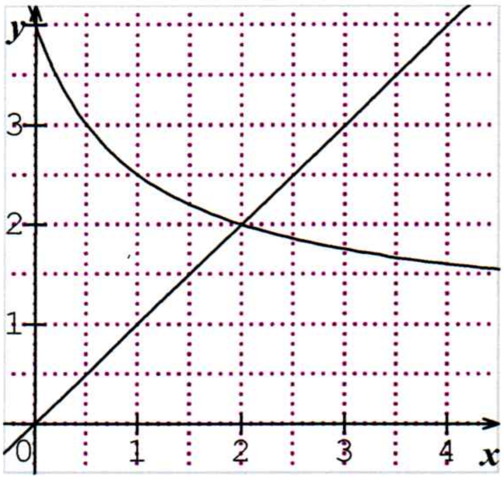
3) f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x+1}{x}$، الدالة الأصلية F للدالة f والتي تحقق $F(1) = 0$ هي الدالة المعرفة بـ:

أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ جـ) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N = \overline{01355}^{6}$ ، كتابته في النظام العشري هي:

أ) $N = 2022$ ب) $N = 1439$ جـ) $N = 1962$

التمرين الثالث (05ن) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (أنظر الشكل).



1) بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $u_0=1$

و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) انقل الشكل ثم مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء،

ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1\le u_n\le\frac{5}{2}$.

3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{12}{u_n+2}-3$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0.

ب) أوجد بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم استنتج عبارة u_n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n=v_n+v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots+v_{n+2022}$

أحسب بدلالة n المجموع P_n بحيث: $P_n=\frac{1}{u_n+2}+\frac{1}{u_{n+1}+2}+\frac{1}{u_{n+2}+2}+\cdots+\frac{1}{u_{n+2022}+2}$

التمرين الرابع(07ن) g دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-x-\ln x$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$ ثم استنتج إشارة g على $]0;+\infty[$

2) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ) أحسب $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} f(x)$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسر النتيجتين هندسيا .

ب) بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي xمن المجال $]0;+\infty[$، $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$.

4) بيّن أن $f(\alpha)=-\alpha+1-\frac{1}{\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) (γ) هو المنحنى الممثل للدالة ln في المعلم السابق .

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

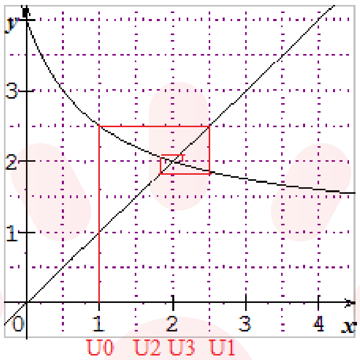
6) أ) احسب $f(1)$، $f(2)$ و $f(e)$ ثم ارسم (γ) و (C_f) .

ب) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x)=m$.

7) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=\alpha$ و $x=e$.

– احسب A بدلالة α ثم تحقق أن : $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ مستنتجا حصرا لـ A

	عناصر الإجابة (الموضوع الأول)	العلامة	
التمرين الأول	لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n = 2\times 5^n + 7$ 1) أ- بما أن a_n هو مجموع عددين أحدهما فردي والأخر زوجي إذا هو عدد فردي........... ب- n بواقي قسمة العدد 5^n على 8: من أجل $n=2k$: $5^n \equiv 1[8]$ و من أجل $n=2k+1$: $5^n \equiv 5[8]$ .... جـ- بما أن $2\times1+7\equiv1[8]$ و $2\times5+7\equiv1[8]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a_n\equiv1[8]$	0.5 0.5 0.5	04
	2) أ- إذا كان: $\begin{cases}x\equiv1[8]\\x\equiv7[125]\end{cases}$ فإن: $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\8x\equiv56[1000]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}125x\equiv125[1000]\\128x\equiv896[1000]\end{cases}$ بالطرح نجد $3x\equiv771[1000]$ أي $9x\equiv313[1000]$ اذا نجد $\begin{cases}8x\equiv56[1000]\\9x\equiv313[1000]\end{cases}$. ومنه $x\equiv257[1000]$ .... ب- من أجل $n\geq3$ يكون : 5^n مضاعف لـ125 ومنه نجد $a_n\equiv7[125]$ ولدينا $a_n\equiv1[8]$ إذا نستنتج أن $a_n\equiv257[1000]$ .... جـ- بما أن $a_{2021}\equiv257[1000]$ و $a_{2022}\equiv257[1000]$ فإن $a_{2021}\times a_{2022}\equiv257^2[1000]$ أي $a_{2021}\times a_{2022}\equiv49[1000]$ اذا الأرقام الثلاث الأخيرة للعدد $(2\times5^{2021}+7)(2\times5^{2022}+7)$ هي 049	0.75 0.5 0.25 0.25	
	3) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $5a_{2n}-a_{2n+1}=28$ ب- إذا كان $PGCD(a_{2n};a_{2n+1})=d$ ، فإن d يقسم a_n وبما أن 2×5^n ليس مضاعف لـ 7 فإن d يختلف عن 7 .... d يقسم 28 ويختلف عن 7 و a_n فردي اذا $d=1$	0.25 0.25 0.25	
التمرين الثاني	1) قيم α التي تكون من أجلها (v_n) متقاربة هي: أ) $\left]0;\frac{3}{2}\right[$ + التبرير... 2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $3y'-2y+6=0$ والذي يحقق الشرط $f(0)=4$ هو: ب) $f(x)=e^{\frac{2}{3}x}+3$ + التبرير... 3) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1)=0$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x+1}{x}$ هي الدالة: أ) $F(x)=x-1+\ln x$ + التبرير... 4) N عدد طبيعي، يكتب في النظام ذي الأساس 6 على الشكل $N=\overline{01355}^6$ ، كتابته في النظام العشري هي: ب) $N=1439$ + التبرير...	01 01 01 01	04

05	0.5	f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+4}{x+1}$. 1) بما أن $f'(x)=\frac{-3}{(x+1)^2}$ فإن f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$.	التمرين الثالث
	0.75 0.5	2) أ- تمثيل الحدود الأربعة الأولى:  التخمين: المتتالية (u_n) غير رتيبة ومتقاربة نحو 2	
	0.75	ب - البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le\frac{5}{2}$: لدينا $1\le u_0\le\frac{5}{2}$ و نفرض أن $1\le u_n\le\frac{5}{2}$ فنجد $1\le u_{n+1}\le\frac{5}{2}$ ومنه $1\le u_n\le\frac{5}{2}$	
	0.75 0.5 0.25	3) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على ℕ بـ: $v_n=\frac{12}{u_n+2}-3$ أ - بما أن $v_n=\frac{6-3u_n}{u_n+2}$ ولدينا $v_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{6-3u_n}{u_n+2}\right)$ اذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=1$ .... ب -عبارة الحد العام: $v_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $u_n=\frac{12}{3+v_n}-2=\frac{12}{3+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}-2$ حساب النهاية: $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$	
	0.5 0.5	ت - حساب S_n: $S_n=1\left(\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{2023}\right)$ حساب P_n:	

ومنه $P_n=\dfrac{1}{12}\left(v_n+3+v_{n+1}+3+v_{n+2}+3\ldots+v_{n+2022}+3\right)$

$P_n=\dfrac{1}{12}\left(S_n+3\times 2023\right)$.

التمرين الرابع — 07

I. الدالة g معرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ: $g(x)=-x-\ln x$ — 0.5

1) أ- $g'(x)\prec 0$ ومنه الدالة g متناقصة.

ب- بما أن الدالة g رتيبة و $g(0.56)\times g(0.57)\prec 0$ — 0.25

فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,56<\alpha<0,57$

إشارة $g(x)$: — 0.25

x	0		α		$+\infty$
g(x)		+	0	−	

2) أ- من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ نجد: $f(x)=\frac{-1+(x-1)\ln x}{x}$ — 0.5

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ — 0.25

$x=0$ معادلة المستقيم المقارب للمنحنى (C)

ب -من اجل كل x من المجال $]0,+\infty[$ نجد: $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$ — 0.5

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$: — 0.75

x	0		α		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f (x)	$+\infty$	↘	f(α)	↗	$+\infty$

3) حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0,2<x_0<0,3$ و $2,2<x_1<2,3$ إذا المنحنى $\left(C_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين — 0.5

4) **من** $g(\alpha)=0$ لدينا $\ln\alpha=-\alpha$ وبالتعويض نجد: $f(\alpha)=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}$ — 0.25

حصر $f(\alpha)$ — 0.25

$-1.35\le f(\alpha)\le -1.31$

5) لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]=0$ **(0.5)**

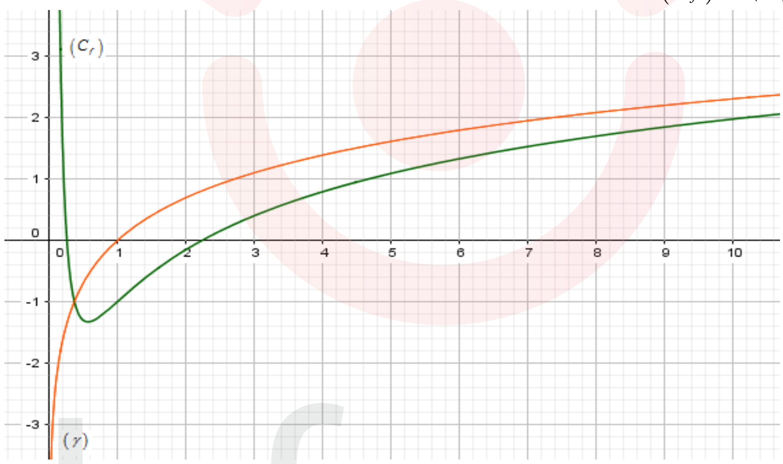
ومنه المنحنى (γ) هو منحنى مقارب للمنحنى (C_f)

– وضعية (C_f) بالنسبة إلى (γ): **(0.5)**

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f(x)-lnx	+	0	−
الوضع النسبي	(C_f) فوق (γ)	تقاطع	(C_f) تحت (γ)

6) أ– حساب $f(1)$، $f(2)$ و $f(e)$

ارسم (γ) و (C_f) **(0.5)**



ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x)=m$ **(0.5)**

$m \prec f(\alpha)$ لا يوجد حلول

$m = f(\alpha)$ يوجد حل وحيد

$m \succ f(\alpha)$ يوجد حلين مختلفين

7) حساب المساحة A : **(0.5)**

$$A=\left[\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_\alpha^e=\frac{3}{2}-\ln\alpha-\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2$$

– التحقق أن: $A=\frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ بتعويض $\ln\alpha=-\alpha$ **(0.25)**

حصر A :

$1.89 \prec A \prec 1.91$ **(0.25)**